

מתמטיקה למכינה 5 יחידות

פרק 40 - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

(ללא ספר)	1. הסבר כללי
1	2. הצבה
2	3. צמצום
3	4. הכפלה בצדדים
4	5. גבולות טריגונומטריים
6	6. פונקציה שואפת לאינסוף
7	7. איקס שואף לאינסוף
9	8. הגבול של אוילר
10	9. כלל הסנדוויץ
11	10. גבול של פונקציה מפוצלת
14	11. גבול לפי הגדרה

הצבה

שאלה

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1$

ב. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x \rightarrow 100} 20$

תשובה

א. 21 ב. $\frac{11}{12}$

ד. 20 ג. 2

פתרונות

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{x + 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9)$$

תשובות סופיות

-3 (5)

$n - 1$ (4)

6 (3)

$\frac{10}{8.5}$ (2)

$\frac{5}{6}$ (1)

$\frac{1}{5}$ (10)

$\frac{8}{17}$ (9)

27 (8)

3 (7)

32 (6)

הכפלה בצד

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x+x}}-1}{\sqrt[3]{x}} \quad (9)$$

תשובות סופיות

$\frac{3}{8}$	(4)	$-\frac{1}{12}$	(3)	4	(2)	$\frac{1}{2}$	(1)
$-\frac{8}{3}$	(8)	$\frac{1}{3}$	(7)	$\frac{3}{4}$	(6)	$\frac{1}{6}$	(5)

גבולות טריגונומטריים

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{x^2 - 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 4x}{\sin 10x} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}{\sin^2 x} \quad (17)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (9)$$

$$4 \quad (8)$$

$$\frac{1}{8} \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \quad (6)$$

$$\frac{1}{\cos^2 a} \quad (13)$$

$$-\sin a \quad (12)$$

$$\cos a \quad (11)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (10)$$

$$1 \quad (17)$$

$$\frac{2}{\pi} \quad (16)$$

$$\frac{1}{2} \quad (15)$$

$$\frac{4}{10} \quad (14)$$

זהויות טריגונומטריות שכדי להזכיר

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \\ \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2} \\ \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\ \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \pi n = 0 \\ \cos \pi n = (-1)^n \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a \\ \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a \end{array} \right.$$

פונקציה שואפת לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 \right) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}} \quad (13)$$

תשובות סופיות

ϕ	(4)	$-\infty$	(3)	ϕ	(2)	ϕ	(1)
ϕ	(8)	∞	(7)	∞	(6)	$-\infty$	(5)
$-\infty$	(12)	ϕ	(11)	1	(10)	0	(9)
						$-\infty$	(13)

x שואף לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{\frac{x+1}{2}}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + kx} - x \right) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x} - x \right) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x \right) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x \right) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx} \right) \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2 \right) \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^5}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^4} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-4)^{10} (3x^2-1)^4}{x^2 (2x-5)^{10} (x^3+1)^2} \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\ln(5 \cdot 2^{x+2} + 6 \cdot e^{x+1}) - x \right] \quad (29)$$

תשובות סופיות

-∞ (4)	4 (3)	- $\frac{\pi}{2}$ (2)	0 (1)
--------	-------	-----------------------	-------

-1 (8)	1 (7)	-5 (6)	0 (5)
--------	-------	--------	-------

$\frac{1}{4}$ (12)	$\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11)	1.5 (10)	-3 (9)
--------------------	--------------------------------------	----------	--------

2 (16)	$\frac{1}{9}$ (15)	4 (14)	0 (13)
--------	--------------------	--------	--------

0 (19)	$e^{\frac{1}{3}}$ (18)	ln 3 (17)
--------	------------------------	-----------

. -∞: $b = 0$, $a < 0$: מ≤. ∞: $b = 0$, $a > 0$ מ≤. $\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}$: $b \neq 0$ מ≤ (20)

- $\frac{1}{2}$ (24)	$\frac{1}{2}$ (23)	$\frac{k}{2}$ (22)	2.5 (21)
----------------------	--------------------	--------------------	----------

$\frac{5}{4}$ (28)	$\frac{3^4}{2^{10}}$ (27)	$\frac{a-b}{2}$ (26)	$\frac{1}{2}$ (25)
--------------------	---------------------------	----------------------	--------------------

ln(6e) (29)

הגבול של אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול של אוילר) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sin x\right)^{\frac{1}{x}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 2}\right)^{10x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4}\right)^{4x^2} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x}\right)^x \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$e^3 \quad (5)$$

$$e^{-1} \quad (4)$$

$$e^2 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$e^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$e \quad (9)$$

$$e^{30} \quad (8)$$

$$e^{-12} \quad (7)$$

$$e \quad (6)$$

כל הסנדוויץ'

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-10 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} [x] \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9)$$

$$(11) \text{ נתונה פונקציה } z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ , המקיימת } \lim_{x \rightarrow 2} z(x) = 4$$

. נתונה פונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, המקיימת $4z(x) \leq f(x) \leq (z(x))^2$, לכל x

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x}$$

$$(12) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$$

תשובות סופיות

$$0 \quad (5)$$

$$3 \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$0 \quad (2)$$

$$0 \quad (1)$$

$$0 \quad (10)$$

$$1 \quad (9)$$

$$4 \quad (8)$$

$$\frac{3}{4} \quad (7)$$

$$0 \quad (6)$$

$$, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x} = 0$$

$$, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16 \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2) = 2$$

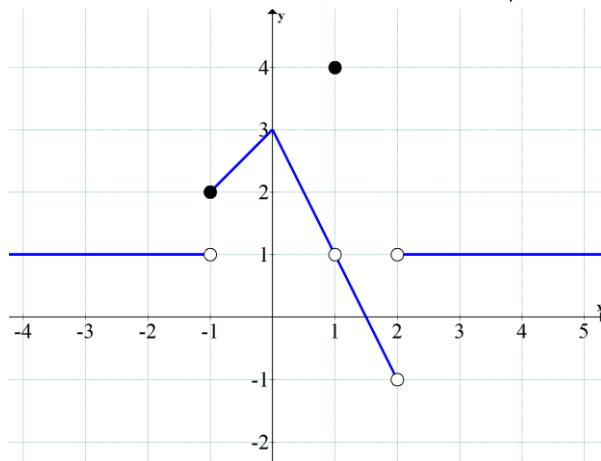
$$, \lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)) = \tan 4$$

$$0 \quad (12)$$

גבול של פונקציה מפוצלת

שאלות

1) להלן גרף של פונקציה:



חשבו את הגבולות הבאים או הוכחו שהם לא קיימים:

א. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 2. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 3. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

ב. $\lim_{x \rightarrow 1} (3f - f^2)$ 2. $\lim_{x \rightarrow -1} (3f - f^2)$

ג. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4-f}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-f}$.ג.

2) נגידר פונקציה $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ x^2 - 1 & 0 < x < 2 \\ 1.5x - 6 & x \geq 2 \end{cases}$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim_{x \rightarrow 2} [4(f(x))^2 + 10f(x)]$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ \cos x & 0 < x < \pi \\ -0.5 & x \geq \pi \end{cases} : f(x) \quad (3)$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim_{x \rightarrow \pi} [2(f(x))^2 + 3f(x)]$

חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow a}$ של הפונקציות הבאות:

$$(a=0), f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$(a=1), f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x-1} & x > 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x < 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$(a=0), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (6)$$

$$(a=\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (7)$$

$$(a=-\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} . \text{א} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} . \text{ב.}$$

תשובות סופיות

1. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$, 2. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \emptyset$, 3. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \emptyset$. **(1)**

1. $\lim_{x \rightarrow 1} (3f - f^2) = 2$, 2. $\lim_{x \rightarrow -1} (3f - f^2) = 2$

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4-f(x)} = \frac{1}{3}$, 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-f(x)} = \emptyset$.

6. ג. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$. ב. ראו בסרטון. **(2)**

-1. ג. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, $\emptyset \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$. ב. ראו בסרטון. **(3)**

4 **(4)**

ϕ **(5)**

ϕ **(6)**

1 **(7)**

-1 **(8)**

$\frac{1}{6}$ ב. א. אין גבול. **(9)**

גבול לפי הגדרה

שאלות

בשאלות 1-6, על פי הגדרת הגבול, הוכחו:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x+1} = 5 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} x^2 + x = 20 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} 7x + 14 = 28 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \sin x = \sin \alpha \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x}{x^2 - 2} = 1 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$(7) \text{ חשבו, על פי הגדרת הגבול: } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x^2 - 1}$$

הוכחו על פי הגדרת הגבול את מקדים 8-11:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{x+2} = 1 \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3+x}{x^2 + 1} = 1 \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{x^2 + x + 1} = 3 \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 4x}{2x + 1} = -2 \quad (10)$$

$$(12) \text{ נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -5$$

הוכחו כי קיים $M > 0$ ממשי כלשהו, כך שמעבר לכל $M > x$ מתקיים $f(x) < -4$.

$$(13) \text{ נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$$

הוכחו כי קיים $M > 0$ ממשי כלשהו, כך שמעבר לכל $M > x$ מתקיים $f^2(x) > 16$.

$$(14) \text{ נניח } f \text{ פונקציה ממשית וחיוובית בתחום } [a, \infty) \text{ המקיימת}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f(x)} = 0$$

$$15) \text{ נתון הגבול } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2} = 1$$

מצאו ערך של $x > M$, עבורו לכל $M > x$ הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול

עד כדי 0.1 (במילים אחרות, מצאו M , כך ש- $|f(x) - L| < 0.1$ $\forall x > M$).

$$16) \text{ נגידר את הפונקציה } f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$$

האם הגבולות קיימים? הוכחו זאת בהסתמך על הגדרת הגבול.

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 2.5} f(x) \quad \text{ג. } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

$$17) \text{ בהינתן הגבול } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+4}{x+11} = \frac{1}{2}, \text{ מצאו } \delta > 0, \text{ כך שלכל } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{המקיים } \left| \frac{2x+4}{x+11} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100} \text{ מתקיים.}$$

18) הוכחו או הפריכו:

$$\text{א. אם } \lim_{x \rightarrow \infty} (f^2(x) - g^2(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

$$\text{ב. אם } 0 < \lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) - g^2(x)), \text{ אז } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0$$

$$\text{ג. אם } L < \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \text{ אז: הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = L \text{ או } -L.$$

$$\text{ד. אם הגבולות } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ ו-} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ קיימים,}$$

$$\text{אז גם הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ קיימם.}$$

$$19) \text{ יש להוכיח כי } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+3} \neq 1 \text{ לפי ההגדרה.}$$

$$20) \text{ יש להוכיח כי } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+1}{x+10} \neq 1 \text{ לפי ההגדרה.}$$

$$21) \text{ הוכחו שאם } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3, \text{ אז קיימת סביבה נקובה של } 0 \text{ שבה } f(x) > 2.$$

. $f(x) > L$ הוכיחו שאם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, אז קיימת סביבה נקובה של x_0 שבה $f(x) > L$.

תשובות סופיות

$\pm\infty$ (7)

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר: GOOL.co.il